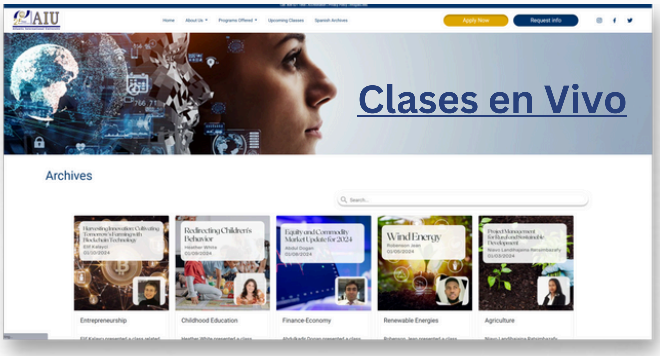
Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

Tabla de Contenido:



Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

1. **DERIVADAS**

1.1. Funciones y límites

Funciones

Una función es una relación entre los elementos de dos conjuntos, de forma que a determinados elementos del primer conjunto se asocian elementos del segundo conjunto de manera unívoca, es decir que a un elemento del primer conjunto no le podemos asociar más de un elemento del segundo conjunto.
A un elemento cualquiera del primer conjunto lo representamos con la letra x, que denominamos variable independiente y al único elemento que le corresponde en el segundo conjunto lo representamos por la letra y, a la que denominamos variable dependiente. A la relación la representamos por la letra f y escribimos

$$y = f(x).$$

Todas las funciones tienen los siguientes elementos:

Dominio de definición de una función f. Es el conjunto de valores de x para los que la función f(x) existe. Lo representamos por

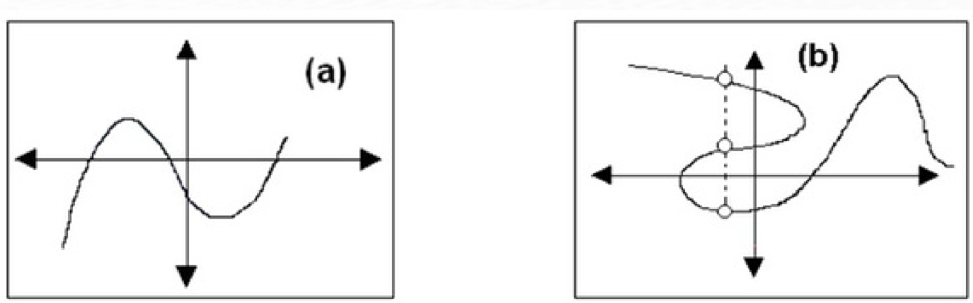
$$\mathrm{Dom}(f).$$

Recorrido o imagen de una función f. Es el conjunto de valores que toma la variable dependiente y. Lo representamos por

$$\mathrm{Img}(f).$$

Para el estudio de las funciones, es importante saber en que conjunto son válidas. En el caso de funciones reales, el conjunto en el que son válidas en el conjunto de los números reales. Las funciones reales de variable real se suelen representar en el plano, utilizando un sistema de referencia.

Otra característica es que la relación debe ser uno a uno. En la figura se muestra (a) la gráfica de una función, mientras que (b) no es la gráfica de una función pues no existe la relación unívoca.



Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

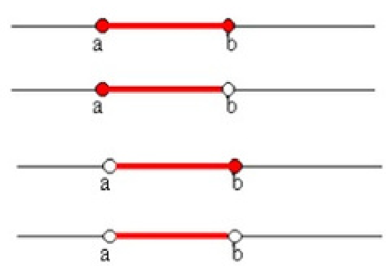
Las funciones pueden expresarse mediante una tabla, una fórmula o una gráfica, siendo estas dos últimas las más comunes. De acuerdo a su expresión analítica, las funciones se pueden clasificar de la siguiente forma:

$$
Funciones\begin{cases} Algebraicas\begin{cases} Polinómicas: f(x)=x^2-2x+1 \\ Racionales: f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2} \\ Irracionales: f(x)=\sqrt{x^2-3} \end{cases} \\ Transcendentes\begin{cases} Exponenciales: f(x)=3^x \\ Logarítmicas: f(x)=\log(3x-1) \\ Trigonométricas: f(x)=\cos x \end{cases} \end{cases}
$$

1.2. Conjuntos abiertos y cerrados

En la recta real se pueden definir tres tipos de conjuntos: cerrados [a, b], abiertos (a, b) y semicerrados o semiabiertos [a, b), (a, b]. Estos se refieren a si se toman en cuenta los dos extremos del conjunto o si no, o si sólo uno. Matemáticamente las definiciones son las siguientes:

$$[a,b]=\{x : x \text{ es real}, a \le x \le b\}$$
$$[a,b)=\{x : x \text{ es real}, a \le x < b\}$$
$$(a,b]=\{x : x \text{ es real}, a < x \le b\}$$
$$(a,b)=\{x : x \text{ es real}, a < x < b\}$$



En cualquiera de los casos, b-a es la longitud del intervalo.

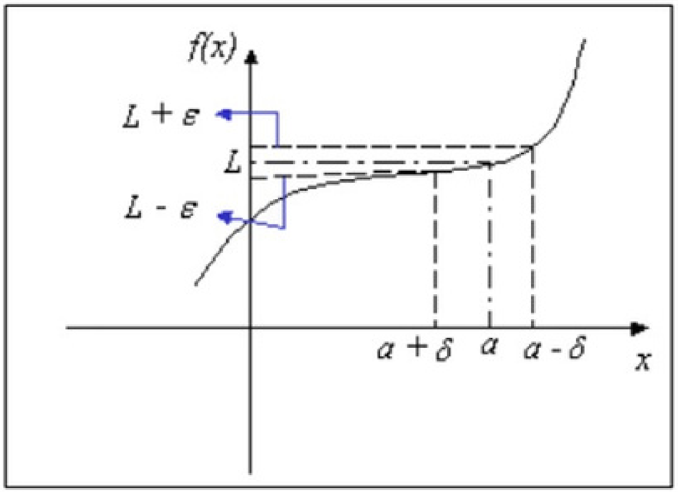
Otra definición importante es el entorno de un número real. Definimos a B como un entorno de un número real x sí y sólo si existe un número γ mayor que cero tal que el intervalo (x-β,x+β) esté contenido o sea igual a B. Matemáticamente se escribe:

B∈$\mathfrak{R}$ es un entorno de x ⇔ ∃ β>0 (x-β, x+β) ⊆ B
En particular, cualquiera que sea ε>0 (x-β, x+β) es un entorno de x.

1.3. Límite de una función en un punto

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

Sea una función f con dominio en los reales a un punto del intevalo I, $L \in \Re$. Definimos a L como el límite de a cuando x se aproxima a a y f(x) se aproxima a L. Los valores de x pertenecen al dominio de la función y es necesario que existan puntos tan próximos a a como queramos, es decir, que a sea un punto de acumulación del dominio y que cuando x se aproxime a a, f(x) se aproxime a L. La siguiente figura esquematiza las aproximaciones. Como puede verse, se deben definir dos intervalos, uno en x y otro en f(x) para poder determinar el límite.



Estrictamente se puede decir que siendo a un punto de un intervalo abierto I y f(x) una función definida en I excepto posiblemente en el punto a, $L \in \Re$ es el límite de f(x) cuando x tiende al punto a, si y solamente si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que para todo $x \in I$, si $0 < |x - a| < \delta$ entonces, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Y se escribe de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

El límite depende únicamente del comportamiento de la función en las proximidades de a, no de cual sea el valor de la función en el punto a ; de hecho, a puede no pertenecer al dominio de la función, lo que sí es necesario es que a sea punto de acumulación.

Ejemplo de límite:

Sea f(x) = (x2 -1)/(x-1) evaluada en el punto x = 1
f(1) = (12-1)/(1-1) =-0/0 ¡!

La división entre cero no está definida. Sin embargo, para cualquier otro punto puede encontrarse un valor determinado de la función, así que consideremos 1 como un punto de acumulación. De esta manera hagamos la siguiente aproximación:

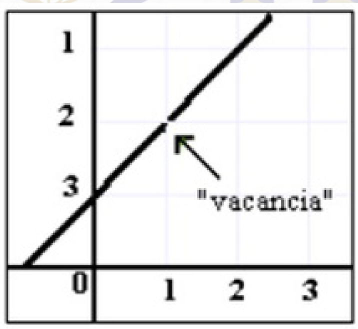
Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

x	$(x^2-1)/(x-1)$
0.5	1.50000
0.9	1.90000
0.99	1.99000
0.999	1.99900
0.9999	1.99990
0.99999	1.99999
...	...

De esta forma vemos que cada vez que x se acerca al valor de 1, f(x) se acerca al valor de dos, por lo tanto podemos decir que el límite de la función cuando x se aproxima a uno es dos.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Sin embargo, el valor de la función directamente evaluado sigue sin estar determinado. Gráficamente lo que se ve es que la función está determinada en todos los puntos, pero que en x = 1 hay una "vacancia", es decir, no existe un valor en los reales que le corresponda.



1.4. Límites laterales

El límite lateral por la izquierda de una función y=f(x) en el punto x = a es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima al valor de a por valores menores que a:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

El límite lateral por la derecha de una función y = f(x) en el punto x = a es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima al valor de a por valores mayores que a:

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

$$lim_{x \to a^+} f(x)$$

Ejemplo:

Sea f(x) la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 2 \\ x - 1 & x > 2 \end{cases}$$

El límite de f(x) cuando nos aproximamos por la izquierda a 2 es igual a 3:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

Mientras que si nos aproximamos por el lado derecho el límite es 1:

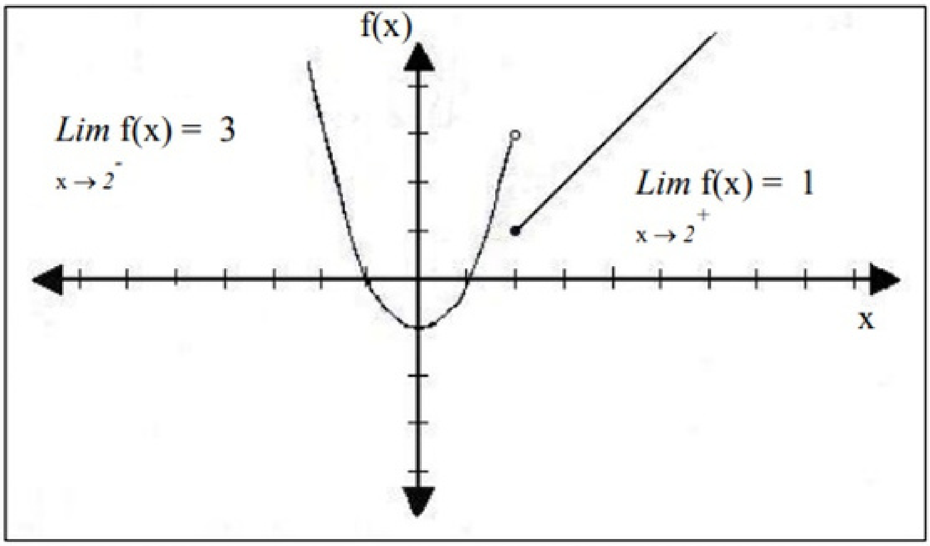
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

Para poder determinar un límite, este debe ser el mismo por cualquier lado que nos aproximemos, es decir:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

por lo tanto en este ejemplo, el límite de f(x) cuando x tiende a dos, NO está determinado.

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo



1.5. Límite de una función en el infinito.

Ya hemos visto que se puede calcular el límite de las funciones cuando se aproximan a un valor determinado. Sin embargo, el límite no está restringido sólo a eso, también pueden calcularse el límite de una función cuando x se aproxima a infinito o menos infinito y esto se representa como:
Ejemplo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$$

Evaluando en infinito tenemos:

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

x	(2x-1)/(x-1)
5	1.800000
50	2.020408
500	2.002004
5 000	2.000200
50 000	2.000020
500000	2.000002
...	...

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2$$

Ahora, evaluando en menos infinito:

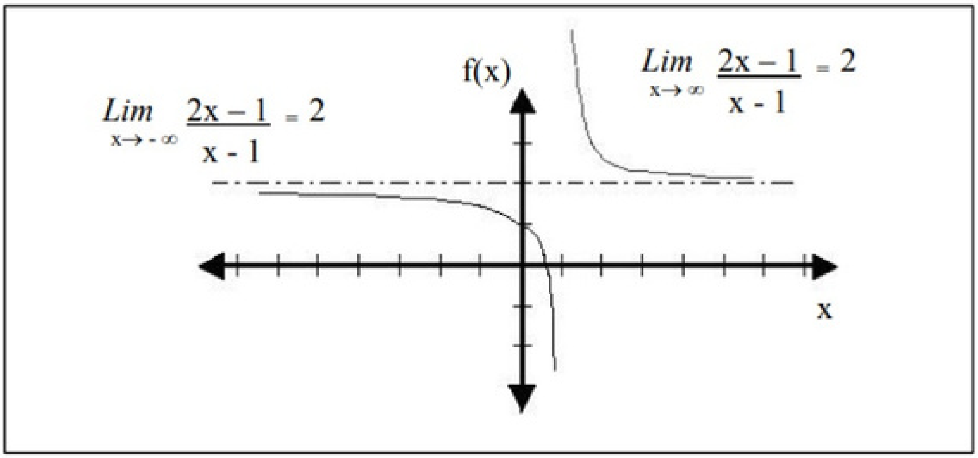
x	(2x-1)/(x-1)
-5	1.833333
-50	1.980392
-500	1.998004
-5 000	1.999800
-50 000	1.999980
-500000	1.999998
...	...

En este caso, tenemos:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2$$

En este caso, el límite coincide y es igual a 2. En general, no necesariamente esto sucede pues puede ser que una función tenga límite cuando esta se va a infinito y no lo tenga cuando avanza hacia menos infinito.

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo



2. Definición de la derivada

El concepto de derivada fue desarrollado por Leibniz y Newton. Leibniz fue el primero en publicar la teoría, pero parece ser que Newton tenía papeles escritos (sin publicar) anteriores a Leibniz. Debido a la rivalidad entre Alemania e Inglaterra, esto produjo grandes disputas entre los científicos de y otro país.

Newton llegó al concepto de derivada estudiando las tangentes mientras que Leibniz estudiando la velocidad de un móvil.

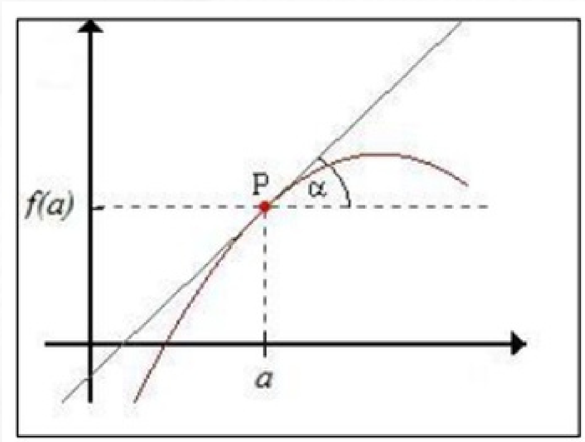
El concepto se derivada se aplica en los casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación. Por ello es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología. También en las ciencias sociales como la Economía y la Sociología se utiliza el análisis matemático para explicar la rapidez de cambio en algunas magnitudes.

Conocer la variación de una función en un intervalo grande no informa suficientemente bien en el sentido de entender como se produce dicha variación. Se necesita estudiar variaciones de la función en intervalos cada vez más pequeños para llegar a entender el concepto de variación instantánea o referida a un punto, es decir el de derivada en un punto.

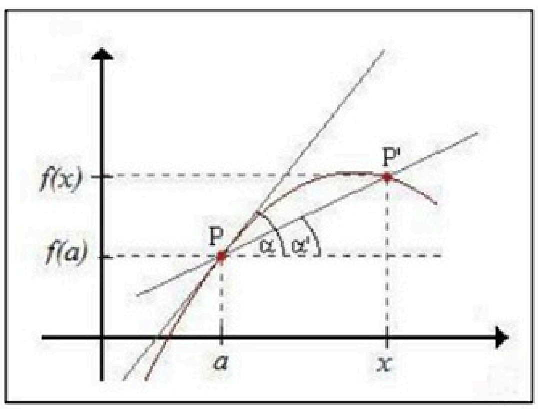
Ejemplo:

Consideremos la tangente a la curva f(x) en el punto P. ¿Cómo se obtiene el ángulo α entre la tangente y el eje x positivo? El conocimiento de los valores a y f(a) no basta para determinarlo, puesto que hay un número infinito de rectas, aparte de la tangente, que pasan por P. Tampoco es necesario conocer la función f(x) en su comportamiento global; el conocimiento de la función en una vecindad arbitraria del punto P debe ser suficiente para determinar α. Esto indica que se debería definir la dirección de la tangente a una curva f(x) mediante un proceso de límite.

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo



Consideremos un segundo punto P' sobre la curva, cercano a P. Por los dos puntos P y P' se traza una línea recta. Si el punto P' se mueve a lo largo de la curva hacia el punto P, entonces la recta PP' se aproxima a la tangente.



Sea α' el ángulo que la recta PP' forma con el eje x positivo.

Entonces

$$\lim_{P \to P'} \alpha' = \alpha$$

Considerando las coordenadas de los puntos P y P', se tiene:

$$\tan \alpha' = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Así, el proceso de límite está representado por la ecuación:

$$\tan \alpha = \lim_{x \to a} \tan\alpha' = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

A este límite se le denomina derivada de la función f(x) en el punto a. Por lo tanto, para que exista la derivada de una función en un punto, tiene que existir ese límite. Cuando no existe este límite, se dice que la función no es derivable en ese punto.

En términos generales, se dice que la derivada de cualquier función y = f(x) mide la variación de y cuando hay una pequeña variación de x. La definición de la derivada de la función y = f(x), es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Existen distintas notaciones para representar la derivada, todas ellas equivalentes:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \dot{f}(x) \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

Por lo tanto, para que exista la derivada de una función en un punto, tiene que existir ese límite. Cuando no existe este límite, se dice que la función no es derivable en ese punto.

La derivada es una función en sí misma y tiene todas las propiedades anteriormente estudiadas de las funciones.

3. Derivadas básicas y aplicaciones

Existe una gran cantidad de derivadas básicas. Todas ellas se obtienen a partir de la definición de derivada. Ejemplos:

f(x) = k

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{k - k}{x - a} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$f(x) = x^n$

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^n)}{x-a} = na^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

A continuación se dan las derivadas más utilizadas:

TABLA DE DERIVADAS

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA	FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$	$y = u \cdot v$	$y' = u \cdot v' + u' \cdot v$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{v \cdot u' - v' \cdot u}{v^2}$	$y = \mathrm{Log}_b\, u$	$y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_b e$ (*)
$y = u^n$	$y' = u' \cdot n \cdot u^{n-1}$	$y = L_n\, u$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = k^u$	$y' = u' \cdot k^u \cdot L_n\, k$ (*)	$y = e^u$	$y' = u' \cdot e^u$
$y = \mathrm{sen}\, u$	$y' = u' \cdot \cos u$	$y = \mathrm{cosec}\, u$	$y' = -u' \cdot \mathrm{cosec}\, u \cdot \mathrm{cotg}\, u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \mathrm{sen}\, u$	$y = \sec u$	$y' = u' \cdot \sec u \cdot \mathrm{tg}\, u$
$y = \mathrm{tg}\, u$	$y' = u' \cdot (1 + \mathrm{tg}^2\, u)$ (**)	$y = \mathrm{cotg}\, u$	$y' = -u' \cdot \mathrm{cosec}^2\, u$
$y = \mathrm{arsen}\, u$	$y' = \frac{u'}{(1 - u^2)^{½}}$	$y = \mathrm{arcosec}\, u$	$y' = \frac{-u'}{\lvert u \rvert \cdot (u^2 - 1)^{½}}$
$y = \mathrm{arcos}\, u$	$y' = \frac{-u'}{(1 - u^2)^{½}}$	$y = \mathrm{arsec}\, u$	$y' = \frac{u'}{\lvert u \rvert \cdot (u^2 - 1)^{½}}$
$y = \mathrm{artg}\, u$	$y' = \frac{u'}{1 + u^2}$	$y = \mathrm{arcotg}\, u$	$y' = \frac{-u'}{1 + u^2}$
$y = u^v$	$y' = v' \cdot u^v \cdot L_n\, u + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$		
$y = f(x) \Rightarrow L_n y = L_n\, f(x) \Rightarrow (y'/y) = (L_n\, f(x))' \Rightarrow y' = y \cdot (L_n\, f(x))$			

(*) $L_n\, k = 1/(\mathrm{Log}_k\, e)$; (**) $= u'/(\cos^2 u) = u' \cdot \sec^2 u$

u,v,w son funciones de x ; u' es la derivada de u respecto de x ; k es una cte ; Ln es Log base e ; n y b son números racionales ; |u| es valor absoluto de u.

La determinación del crecimiento y decrecimiento de una función es en general una tarea bastante difícil, para este tipo de problemas, las derivadas son muy útiles.

3.1. Funciones crecientes y decrecientes

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

Una función f (x) es creciente en un intervalo (a, b) si satisface que

$$f(x+h) \geq f(x) \quad \text{si } h > 0, \text{ con } x, x+h \in (a,b)$$

Si una función es creciente en (a, b) entonces

$$\frac{d\,f(x)}{dx} \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

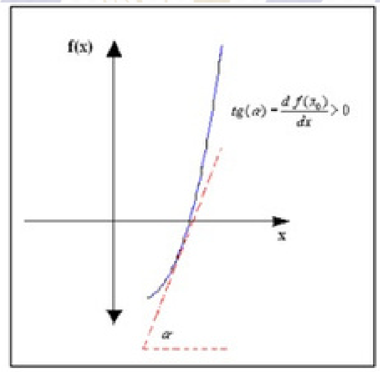
En efecto, si h > 0 y nos aproximamos por la derecha de x

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{d\,f(x)}{dx} \geq 0$$

y si h > 0 y nos aproximamos por la izquierda de x.

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \frac{d\,f(x)}{dx} \geq 0$$

En cualquier caso, la derivada es no negativa. Por lo demás es un resultado intuitivamente cierto toda vez que la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente a dicho punto.



3.2. Función decreciente

Una función f (x) es decreciente en un intervalo (a, b) si satisface que

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

$$f(x+h) \leq f(x) \quad \text{si} \;\; h > 0, \text{ con } x, x+h \in (a,b)$$

Si una función es decreciente en (a, b) entonces

$$\frac{d\,f(x)}{dx} \leq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$$

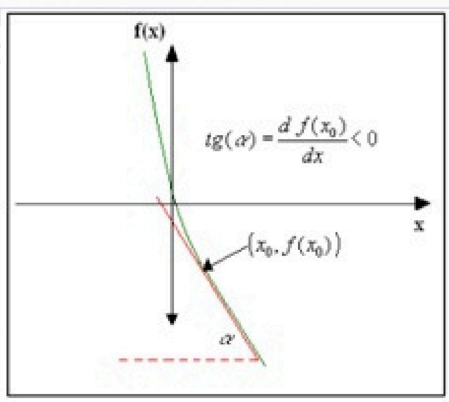
En efecto, si h > 0 y nos aproximamos por la derecha de x

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{d\,f(x)}{dx} \leq 0$$

y si h > 0 y nos aproximamos por la izquierda de x

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \frac{d\,f(x)}{dx} \leq 0$$

En cualquier caso, la derivada es no negativa. Por lo demás es un resultado intuitivamente cierto toda vez que la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente a dicho punto.



Ejemplo:

Determinar los intervalos en que crece o decrece la función con ecuación.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 1)$$

Hay que calcular la primera derivada

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

$$f : f'(x) = x - 2$$

Como f'(x)>0 ⇔ x-2 > 0, o sea si x>2, entonces f es creciente para x>2.
Como f'(x)<0 ⇔ x-2 < 0, o sea si x<2, entonces f es decreciente para x<2.

Además de esto, las derivadas también son útiles para la resolución de problemas en el área científica y tecnológica, donde existen variaciones muy pequeñas de alguna variable, particularmente cuando el tiempo está involucrado.

4. Máximos y mínimos, cálculo y aplicación

4.1. Máximos de una función

En un punto en el que la derivada se anule y antes sea positiva y después del punto negativa, se dice que la función tiene un máximo relativo, es decir, que

f'(xo) = 0

y en ese punto, la función, pase de creciente a decreciente.

En x = a, la función tiene un máximo relativo y se observa que su derivada se anula en ese punto, pasando de positiva a negativa. (se anula y cambia de signo). Entonces se dice que

∃ max en (a,f(a))

4.2. Mínimos de una Función

En un punto en el que la derivada se anule y antes sea negativa y después del punto positiva, se dice que la función tiene un mínimo relativo, es decir, que

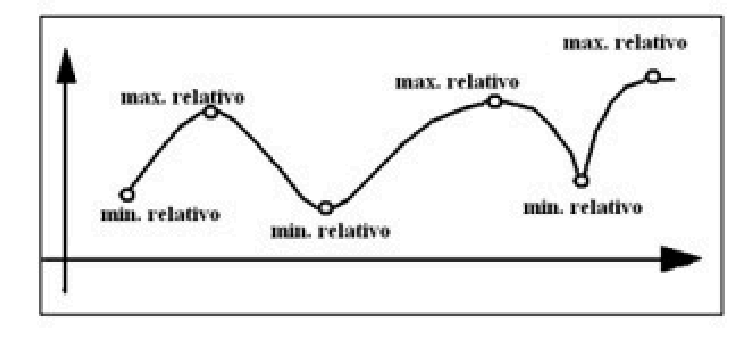
f'(xo) = 0

y en ese punto, la función, pase de decreciente a creciente.
En x = b, la función tiene un mínimo relativo y se observa que su derivada se anula en ese punto, pasando de negativa a positiva. Entonces se dice que

∃ min en (b,f(b))

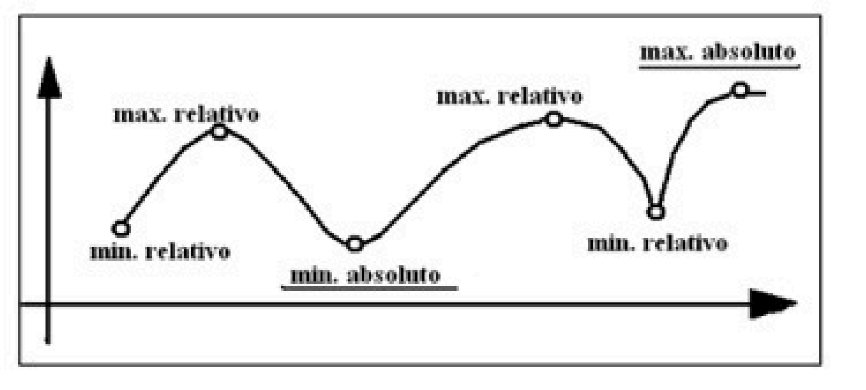
Para que una función tenga máximo o mínimo NO es suficiente con que su derivada se anule, debe además, cambiar de signo.

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo



4.3. Extremos absolutos

Extremos relativos a veces pueden ser extremos absolutos, como demuestra la siguiente definición:
f tiene un máximo absoluto a c si f(c) ≥ f(x) para toda x en el dominio de f.
f tiene un mínimo absoluto a c si f(c) ≤ f(x) para toda x en el dominio de f.
Todos los extremos absolutos son automáticamente extremos relativos, según nuestra convención.



4.4. Puntos de Inflexión de una función

Un punto de inflexión es aquel donde la función derivada tiene un máximo o mínimo, es decir, un punto singular. Se dice entonces que la función tiene un cambio en la concavidad.
Para calcular los puntos de inflexión hay que igualar a cero la derivada segunda y comprobar que ésta cambia de signo. Es decir, estudiar los máximos y mínimos de la primera derivada, para ello se deriva la primera derivada (segunda derivada) y se anula.
En los puntos donde la segunda derivada se anule y cambie de signo, la función tendrá un punto de inflexión y su derivada un max o un min.

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo

Donde la segunda derivada sea positiva se dice que la función es cóncava positiva y donde es negativa concavidad negativa.

4.5. Aplicaciones

El cálculo de máximos y mínimos es muy útil en la resolución de problemas financieros, pues se puede usar para estudiar tasas de variación, valores máximos y mínimos de una función, concavidad y convexidad, etc. Además son esenciales en todos los sistemas de producción, permitiendo encontrar los puntos de optimización de estos.

Ejemplo:

Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad de dinero invertida, según la formula:

$$R(x)=-0.002x2 + 0.8x - 5$$

donde R(x) representa la rentabilidad generada cuando se invierte la cantidad x.
Determinar, teniendo en cuenta que disponemos de 500 dólares:
a) Cuando aumenta y cuando disminuye la rentabilidad
b) Cuanto dinero debemos invertir para obtener la máxima rentabilidad posible.
c) Cual será el valor de dicha rentabilidad.

Solución

a) La derivada primera nos da el crecimiento o decrecimiento de la función. Si la derivada es positiva la función crece y si es negativa decrece

$$R'(x)= - (2)0.002x+0.8 = -0.004x + 0.8$$

Se iguala a 0 y se resuelve la ecuación que resulta

$$R'(x)= 0 \Rightarrow x = (0.8)/(0.004) = 200$$

Se estudia el signo de la derivada a la derecha e izquierda de los valores que nos ha dado 0 la derivada (en este caso x =200). Esto se puede hacer eligiendo un punto menor que 200, por ejemplo 100, y sustituyendo:

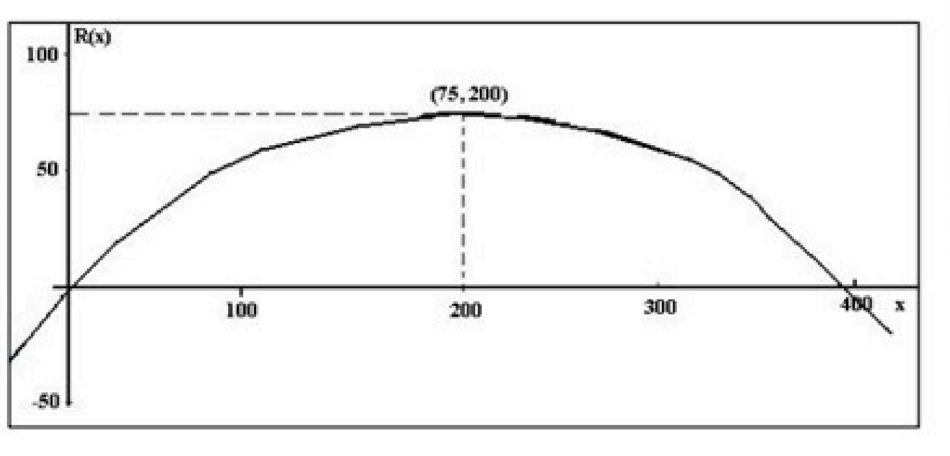
$$R'(100) = 0.4 > 0$$

y en otro mayor que 200, por ejemplo 300:

$$R'(300)= -0.4 < 0$$

Entonces la derivada es positiva en el intervalo (0, 200), y f es creciente en ese intervalo y es decreciente en (200, 500) ya que en ese intervalo nos ha dado negativa la derivada. Lo que nos dice también que en punto 200 hay un máximo local.

Funciones, Límites y Derivadas en Cálculo



b) Teniendo en cuenta el apartado a), el máximo se encuentra en 200, por lo tanto, debemos invertir 200 dólares.

c) La máxima rentabilidad es en 200, por lo que hay que sustituir ese valor en la ecuación original:

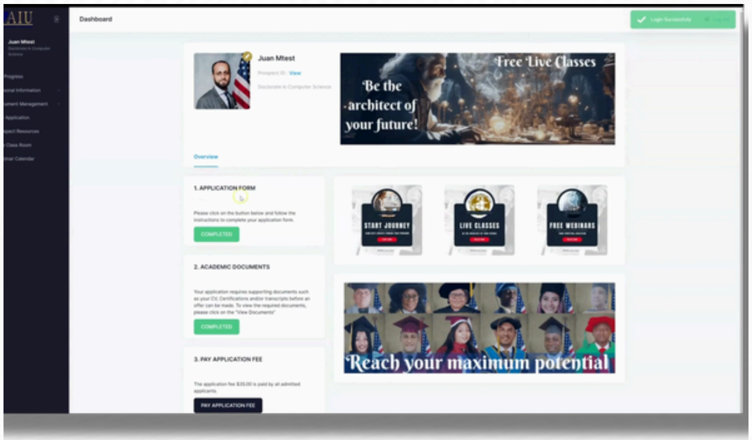
R (200)= -0.002(200)2+ 0.8(200)-5 = 75 dólares

¿Disfrutaste esta lectura?

Contáctanos

Solicitar Información

Demo del Campus Virtual



Galería de Graduados